Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 1. November 2013

Aufgabe 1 (homotopieinvariante Funktoren)**.** Sei $F\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ein homotopieinvarianter Funktor. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist X kontraktibel, so ist $F(X) \cong 0$.
2. Ist $F(S^1 \times D^2) \cong \mathbb{Z}$, so ist $F(S^1 \times S^1) \not\cong \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (Orientierungen und Abbildungsgrade)**.** Sei C eine Kategorie und sei $F\colon C \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ein Funktor. Ein Objekt $X \in \operatorname{Ob}(C)$ heißt *F-orientierbar*, falls $F(X) \cong \mathbb{Z}$ ist. Ein *F-orientiertes Objekt* ist ein Paar $(X, [X])$, wobei X ein F-orientierbares Objekt in C und $[X] \in F(X)$ ein Erzeuger ist.

1. Definieren Sie eine Kategorie F-orientierter Objekte und einen Gradbegriff (mit Werten in $\mathbb{Z}$) für Morphismen in dieser Kategorie.
2. Wie verhält sich dieser Gradbegriff unter Verknüpfung von Morphismen? Welche Abbildungsgrade sind für Isomorphismen möglich? Sind alle Morphismen mit diesen Graden Isomorphismen? Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 3 (der Brouwersche Fixpunktsatz)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

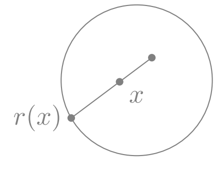
1. Die Sphäre S^{n-1} ist *nicht* kontraktibel.
2. Es gibt *keine* stetige Abbildung $r\colon D^n \longrightarrow S^{n-1}$ mit $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.
3. *Der Brouwersche Fixpunktsatz.* Jede stetige Abbildung $D^n \longrightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt.
4. Ist $f\colon D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $f(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$, so gilt bereits $D^n \subset f(D^n)$.

Zeigen Sie

– die Äquivalenz der Aussagen 1, 2, 3, falls Sie die Vorlesung Algebraische Topologie I *nicht* besucht haben.

– die Äquivalenz von Aussage 4 zu den ersten drei Aussagen, falls Sie die Vorlesung Algebraische Topologie I besucht haben.

Hinweis. In den meisten Fällen empfiehlt es sich, die entsprechenden Implikationen per Kontraposition zu beweisen. Für die Implikation „2. $\Longrightarrow$ 3.“ kann das folgende Bild hilfreich sein:



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Abbildungsgrade linearer Abbildungen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir versehen die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n+1) \subset \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \cong \mathbb{R}^{(n+1)\cdot(n+1)}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n+1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten besitzt.

   Hinweis. Es gibt mehrere Möglichkeiten dies zu beweisen, zum Beispiel: Zu $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $R_v \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ die Matrix, die (bezüglich der Standardbasis) der Spiegelung an der Hyperebene orthogonal zu v entspricht. Zeigen Sie als ersten Schritt: Sind $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig, so gibt es in $\mathrm{O}(n+1)$ einen stetigen Weg von R_v nach R_w. Verwenden Sie nun einen geeigneten Normalformensatz für orthogonale Matrizen (z.B. den Spektralsatz für normale Matrizen) oder eine geeignete Induktion, um orthognale Matrizen in ein Produkt von Spiegelungen zu zerlegen ...

2. Was bedeutet dies für Abbildungsgrade bezüglich dem Funktor F_n aus dem Satz über die Existenz interessanter homotopieinvarianter Funktoren von Abbildungen der Form

   $$\begin{aligned} S^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto A \cdot x \end{aligned}$$

   mit $A \in \mathrm{O}(n+1)$?

Bonusaufgabe (Nash-Gleichgewichte)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was Nash-Gleichgewichte in der Spieltheorie sind.

2. Zeigen Sie die Existenz von Nash-Gleichgewichten mithilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Abgabe bis zum 8. November, 10:00 Uhr, in den Briefkasten