Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 8. November 2013

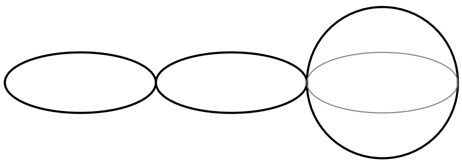
Hinweis. Im folgenden schreiben wir $\bullet := \{\emptyset\}$ für „den“ Einpunktraum. Sei im folgenden R ein Ring mit Eins und sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\,\mathsf{Mod}$.

Aufgabe 1 (Homologietheorien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Mit $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ ist auch $\bigl((h_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\,\mathsf{Mod}$.
2. Ist $h_0(\bullet) \not\cong 0$, so ist $h_0(S^0) \not\cong h_0(\bullet)$.

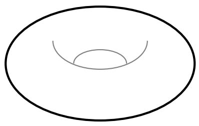
Aufgabe 2 (Homologie von Badeschaum)**.** Sei

$$B := \bigl(S^1 \times \{0\}\bigr) \cup \bigl((2,0,0) + (S^1 \times \{0\})\bigr) \cup \bigl((4,0,0) + S^2\bigr) \subset \mathbb{R}^3.$$



Drücken Sie die Homologie $(h_k(B))_{k\in\mathbb{Z}}$ von B durch die Homologie von Sphären bzw. von $\bullet$ aus. Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (Homologie des Torus)**.** Bestimmen Sie folgendermaßen die Homologie des Torus $T := S^1 \times S^1$:



Dabei sei $U \subset S^1$ eine offene Umgebung von $(1,0) \in S^1$ und $S := S^1 \times U \subset T$. Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

1. Zeigen Sie mithilfe der langen exakten Paarsequenz und einem topologischen Argument: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ induzieren die Inklusionen $(T,\emptyset) \hookrightarrow (T,S)$ bzw. $S \hookrightarrow T$ einen Isomorphismus $h_k(T) \cong h_k(S) \oplus h_k(T,S)$.
2. Zeigen Sie mithilfe von Ausschneidung: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist
$$h_k(T,S) \cong h_k\bigl(S^1 \times [0,1], S^1 \times \{0\} \sqcup S^1 \times \{1\}\bigr).$$
3. Verwenden Sie die lange exakte Tripelsequenz und Ausschneidung, um $h_k\bigl(S^1 \times [0,1], S^1 \times \{0\} \sqcup S^1 \times \{1\}\bigr)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ durch die Homologie von S^1 bzw. $\bullet$ auszudrücken.
4. Wie kann man also die Homologie $(h_k(T))_{k\in\mathbb{Z}}$ von T mithilfe der Homologie von $\bullet$ ausdrücken? Formulieren Sie dies auch explizit für den Fall, dass die Homologietheorie eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in Ab und Koeffizienten isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (reduzierte Homologie)**.** Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so definieren wir die *k-te reduzierte Homologie von X bezüglich* $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ durch

$$\widetilde{h}_k(X) := \ker\bigl(h_k(c_X)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(\bullet)\bigr) \subset h_k(X),$$

wobei $c_X : X \longrightarrow \bullet$ die eindeutig bestimmte Abbildung ist.

1. Zeigen Sie: Für alle topologischen Räume X, alle $x_0 \in X$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist die von den Inklusionen induzierte Komposition

   $$\widetilde{h}_k(X) \longrightarrow h_k(X) \longrightarrow h_k\bigl(X, \{x_0\}\bigr)$$

   ein Isomorphismus.

2. Zeigen Sie: Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so ist

   $$\widetilde{h}_k(f) := h_k(f)|_{\widetilde{h}_k(X)} \colon \widetilde{h}_k(X) \longrightarrow \widetilde{h}_k(Y)$$

   wohldefiniert; man erhält auf diese Weise einen homotopieinvarianten Funktor $\widetilde{h}_k\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\,\mathsf{Mod}$ mit $\widetilde{h}_k(\bullet) \cong 0$.

3. Wie lautet für reduzierte Homologie das Analogon zur langen exakten Paarsequenz? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Bonusaufgabe (abelsche Kategorien)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur die Definition von *additiven* bzw. *abelschen Kategorien* nach.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine additive Kategorie, die *nicht* abelsch ist.
3. Wie kann man in abelschen Kategorien exakte Sequenzen definieren?
4. Was besagt der Einbettungssatz von Freyd-Mitchell?

Abgabe bis zum 15. November, 10:00 Uhr, in den Briefkasten