Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh Blatt 5 vom 15. November 2013

Aufgabe 1 (induzierte Abbildungen in gewöhnlicher Homologie)**.** Es sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab mit Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine injektive stetige Abbildung, so sind die induzierten Abbildungen $h_k(f)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(Y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ injektiv.
2. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung, so sind die induzierten Abbildungen $h_k(f)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(Y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ surjektiv.

Aufgabe 2 (Homologie der projektiven Ebene bzw. der Kleinschen Flasche)**.** Sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab und sei $K := [0,1] \times [0,1] \bigm/\!\sim$ die *Kleinsche Flasche*, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$" die folgende Verklebung modelliert:

1. Bestimmen Sie wahlweise $\bigl(h_k(\mathbb{R}P^2)\bigr)_{k\in\mathbb{Z}}$ oder $\bigl(h_k(K)\bigr)_{k\in\mathbb{Z}}$ mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz, wenn die Koeffizienten von $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind.
2. Bestimmen Sie wahlweise $\bigl(h_k(\mathbb{R}P^2)\bigr)_{k\in\mathbb{Z}}$ oder $\bigl(h_k(K)\bigr)_{k\in\mathbb{Z}}$ mithilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz, wenn die Koeffizienten von $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ sind.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (Abbildungsgrade von Selbstabbildungen von Sphären)**.** Es gebe eine gewöhnliche Homologietheorie $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ auf Top^2 mit Werten in Ab und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$.

1. Falls Sie *nicht* an der Algebraischen Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie (mithilfe des Abbildungsgrades $\deg_{h_1}$) den Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

   Hinweis. Zeigen Sie, dass ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ von nicht-trivialem Grad, das in $\mathbb{C}$ keine Nullstelle hat, eine Abbildung $\widetilde{p}\colon S^1 \longrightarrow S^1$ mit $\deg_{h_1} \widetilde{p} = \deg p$ liefern würde, die nullhomotop ist ...
2. Falls Sie an der Algebraischen Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie, dass die Gradabbildung $\deg_{h_n}\colon [S^n, S^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ bijektiv ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "c_{k+1}"] & A_k \arrow[r, "a_k"] \arrow[d, "f_{A,k}"'] & B_k \arrow[r, "b_k"] \arrow[d, "f_{B,k}"'] & C_k \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "f_{C,k}"] & A_{k-1} \arrow[r, "a_{k-1}"] \arrow[d, "f_{A,k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "c'_{k+1}"'] & A'_k \arrow[r, "a'_k"'] & B'_k \arrow[r, "b'_k"'] & C'_k \arrow[r, "c'_k"'] & A'_{k-1} \arrow[r, "a'_{k-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ein ($\mathbb{Z}$-indiziertes) kommutatives Diagramm in ${}_R\,\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Dabei sei $f_{C,k}\colon C_k \longrightarrow C'_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k \colon B'k \longrightarrow A_{k-1}.$$

Zeigen Sie mit einer Diagrammjagd, dass dann die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\ \Delta_{k+1}\ } A_k \xrightarrow{(f_{A,k},-a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k \oplus f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\ \Delta_k\ } A_{k-1} \xrightarrow{\qquad} \cdots$$

in ${}_R\,\mathsf{Mod}$ exakt ist.

Bonusaufgabe (Übersetzung Algebra $\rightsquigarrow$ Topologie)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine additive gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$ und sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Konstruieren Sie einen Funktor

$$R_k\colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Top}_\mathrm{h}$$

mit $h_k \circ R_k \cong \mathrm{id}_{\mathsf{Ab}}$ und $h_\ell \circ R_k \cong 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_{>0} \setminus \{k\}$.
Hinweis. Ist A eine abelsche Gruppe, so gibt es eine (natürliche) kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K(A) \longrightarrow F(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

in Ab, wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ der freie Erzeugungsfunktor ist (Beispiel 1.32). Bauen Sie diese Situation nun in Top mithilfe von Sphären und Abbildungskegeln nach ... Wenn Sie möchten, können Sie sich auf die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen beschränken.

Abgabe bis zum 22. November, 10:00 Uhr, in den Briefkasten