Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 22. November 2013

Aufgabe 1 (induzierte Abbildungen in algebraischer Homologie)**.** Sei R ein Ring mit Eins, seien $C, D \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $f \colon C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $f_k \colon C_k \longrightarrow D_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ injektiv, so ist $H_k(f) \colon H_k(C) \longrightarrow H_k(D)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ injektiv.
2. Ist $f_k \colon C_k \longrightarrow D_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus, so ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ die induzierte Abbildung $H_k(f) \colon H_k(C) \longrightarrow H_k(D)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 (algebraische Eulercharakteristik)**.** Sei R ein Ring mit Eins, für den es einen gutartigen Rangbegriff rk_R gibt (z.B. Körper, Hauptidealring, …). Ein Kettenkomplex $C \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ heißt *endlich*, wenn C_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ über R endlich erzeugt ist und $\{k \in \mathbb{Z} \mid C_k \not\cong 0\}$ endlich ist. Die *Eulercharakteristik* eines endlichen Kettenkomplexes $C \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ist durch

$$\chi(C) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot \operatorname{rk}_R C_k \in \mathbb{Z}$$

definiert. Zeigen Sie: Für alle endlichen Kettenkomplexe $C \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ gilt

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot \operatorname{rk}_R\bigl(H_k(C)\bigr).$$

Geben Sie dabei auch explizit an, welche Eigenschaften des Rangbegriffs Sie verwendet haben.

Aufgabe 3 (Kettenkomplexe simplizialer Moduln)**.** Ist C eine Kategorie, so heißen Funktoren vom Typ $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow C$ auch *simpliziale C-Objekte*. Die Kategorie $\Delta(C)$ enthält als Objekte die simplizialen C-Objekte, als Morphismen natürliche Transformationen und als Verknüpfungen die (objektweise) Verknüpfung von natürlichen Transformationen.

Ist R ein Ring mit Eins und ist $S \in \operatorname{Ob}(\Delta({}_R\mathsf{Mod}))$, so schreiben wir

$$C_k(S) := \begin{cases} S\bigl(\Delta(k)\bigr) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot S(d_j^k) & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0 \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und setzen $C(S) := \bigl((C_k(S))_{k \in \mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}\bigr)$.

1. Zeigen Sie: Ist $S \in \operatorname{Ob}(\Delta({}_R\mathsf{Mod}))$, so ist $C(S)$ ein Kettenkomplex von Links-R-Moduln.
2. Erweitern Sie diese Konstruktion zu einem Funktor $\Delta({}_R\mathsf{Mod}) \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$.

Hinweis. Hierbei bezeichnet Δ^{op} die duale Kategorie (s. Aufgabe 2 von Blatt 1) der Simplexkategorie Δ und die Morphismen d_j^k sind in Aufgabe 4 von Blatt 1 definiert.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (modifizierte Homologietheorien)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Ein $\mathbb{Z}$-Modul Z ist *flach*, wenn der Funktor $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ kurze exakte Sequenzen in kurze exakte Sequenzen überführt. Sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Ist Z ein $\mathbb{Z}$-Modul, so schreiben wir

$$Z \otimes_{\mathbb{Z}} \bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr) := \bigl(((Z \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot\,) \circ h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mathrm{id}_Z \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$$

Zeigen Sie:

1. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2013$ ist *nicht* flach.
2. Ist Z ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul, so bildet der Funktor $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ auch $\mathbb{Z}$-indizierte exakte Sequenzen auf $\mathbb{Z}$-indizierte exakte Sequenzen ab.
3. Ist Z ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul, so ist $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2.
4. Ist $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2, so ist Z ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul.

   Hinweis. Sie können das Ergebnis der Bonusaufgabe von Blatt 5 verwenden.

Bonusaufgabe (Spektralsequenzen)**.** Lesen Sie die entsprechenden Begriffe in der Literatur nach und beantworten Sie die folgenden Fragen:

1. Was ist eine homologische Spektralsequenz?
2. Was ist (beschränkte) Konvergenz einer homologischen Spektralsequenz?
3. Geben Sie eine Spektralsequenz und einen Konvergenzsatz dafür für (beschränkte) Filtrierungen von Kettenkomplexen an.
4. Wie kann man aus dieser Spektralsequenz die lange exakte Homologiesequenz für kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen als Spezialfall erhalten?

Illustrieren Sie Ihre Antworten durch geeignete schematische Skizzen!

Abgabe bis zum 29. November, 10:00 Uhr, in den Briefkasten