Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 29. November 2013

Aufgabe 1 (singuläre Ketten von Vereinigungen und Produkten)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel (http://mathoverflow.net/a/23589)).

1. Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \subset X$ offen mit $U \cup V = X$. Dann wird $C_k(X)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ von $\operatorname{im} C_k(i_U) \cup \operatorname{im} C_k(i_V)$ erzeugt, wobei $i_U \colon U \longrightarrow X$ bzw. $i_V \colon V \longrightarrow X$ die Inklusionen sind.

2. Sind X und Y topologische Räume, so induzieren die beiden Projektionen $X \times Y \longrightarrow X$ und $X \times Y \longrightarrow Y$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen
$$C_k(X \times Y) \cong C_k(X) \times C_k(Y).$$

Aufgabe 2 (Homologie von direkten Summen/Produkten)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei $(C_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.

1. Sei $C := \bigoplus_{i \in I} C_i$ die gradweise direkte Summe dieser Familie von Kettenkomplexen (mit der gradweisen direkten Summe der Randoperatoren als Randoperator). Zeigen Sie, dass die Inklusionen $(C_i \hookrightarrow C)_{i \in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen
$$\bigoplus_{i \in I} H_k(C_i) \longrightarrow H_k(C)$$
induzieren.

2. Gilt auch die analoge Aussage für Produkte von Kettenkomplexen? Begründen Sie Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 3 (singuläre Homologie im Grad 1)**.** Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $\alpha \in H_1(X; \mathbb{Z})$. Zeigen Sie: Dann gibt es eine stetige Abbildung $f \colon S^1 \longrightarrow X$ mit
$$\alpha \in \operatorname{im} H_1(f; \mathbb{Z}).$$
Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (singuläre Homologie und aufsteigende Vereinigungen)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei Z ein Links-R-Modul. Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen von X mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^\circ = X$. Zeigen Sie (mit einem geeigneten Kompaktheitsargument): Die Inklusionen $(X_n \hookrightarrow X)_{n\in\mathbb{N}}$ induzieren für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) \longrightarrow H_k(X; Z).$$

Hinweis. Dabei ist

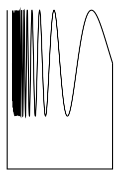
$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) := \Bigl(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z)\Bigr) \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation ist, die von

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad \forall_{\alpha\in H_k(X_n;Z)} \quad \alpha \sim H_k(i_{n,m})(\alpha) \in H_k(X_m; Z)$$

erzeugt wird, wobei $i_{n,m}\colon X_n \longrightarrow X_m$ die entsprechende Inklusion bezeichnet.

Bonusaufgabe (Geschenkesack I; falls Sie *nicht* an Algebraische Topologie I teilgenommen haben)**.** Der zweidimensionale Nikolaus ist auf einen Geschenkesack der Form



$$\begin{aligned} S := {} & \bigl\{(x, \sin(2\cdot\pi/x)) \bigm| x \in (0,1]\bigr\} \\ & \cup \bigl(\{1\} \times [-2,0]\bigr) \cup \bigl([0,1] \times \{-2\}\bigr) \cup \bigl(\{0\} \times [-2,1]\bigr) \end{aligned}$$

(mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$) umgestiegen. Zeigen Sie, dass S *nicht* kontraktibel ist, dass aber die konstante Abbildung $S \longrightarrow \bullet$ für alle Ringe R mit Eins, alle Links-R-Moduln Z und alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$H_k(S; Z) \longrightarrow H_k(\bullet; Z)$$

induziert.
Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass singuläre Homologie homotopieinvariant ist.

Bonusaufgabe (Geschenkesack II; falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben)**.** Auch der dreidimensionale Nikolaus sehnt sich dieses Jahr nach einem etwas extravaganteren Geschenkesack. Genauer sucht er eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ (den prall gefüllten Geschenkesack) mit folgenden Eigenschaften:

- Der Teilraum $D \subset \mathbb{R}^3$ (mit der Teilraumtopologie) ist homöomorph zu D^3.
- Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus D^3$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

Zeigen Sie, dass es tatsächlich eine solche Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ gibt.
Hinweis. Starten Sie mit D^3, konstruieren Sie induktiv ineinandergeschachtelte „Hörner“, die aus D^3 herauswachsen und betrachten Sie den Kolimes dieser Konstruktion.

Abgabe bis zum 6. Dezember 2013, 10:00 Uhr, in den Briefkasten