Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 6. Dezember 2013

Aufgabe 1 (algebraische Eulercharakteristik und Homotopie)**.** Seien C und D Kettenkomplexe abelscher Gruppen mit $C \simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{Ch}} D$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist C endlich, so ist auch D endlich.
2. Sind C und D endlich, so gilt $\chi(C) = \chi(D)$.

Hinweis. Endliche Kettenkomplexe und die Euler-Charakteristik wurden in Aufgabe 2 von Blatt 6 definiert.

Aufgabe 2 (Durchmesser affiner Simplizes)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Ein singuläres Simplex $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ heißt *affin*, falls

$$\sigma(t_0, \dots, t_k) = \sum_{j=0}^{k} t_j \cdot \sigma(e_{j+1})$$

für alle $(t_0, \dots, t_k) \in \Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ erfüllt ist (wobei $e_1, \dots, e_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ die Einheitsvektoren sind). Ist $A \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$, so ist

$$\operatorname{diam} A := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

der *Durchmesser von A*.

1. Zeigen Sie: Ist $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ ein affines Simplex, so ist
$$\operatorname{diam}\bigl(\sigma(\Delta^k)\bigr) = \max_{j,j' \in \{0,\dots,k\}} \bigl\|\sigma(e_{j+1}) - \sigma(e_{j'+1})\bigr\|_2.$$
2. Zeigen Sie: Ist $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ ein affines Simplex, so gilt für alle Summanden τ in der Definition der baryzentrischen Unterteilung $B_k(\sigma)$, dass
$$\operatorname{diam}\bigl(\tau(\Delta^k)\bigr) \leq \frac{k}{k+1} \cdot \operatorname{diam}\bigl(\sigma(\Delta^k)\bigr).$$

Aufgabe 3 (algebraische Abbildungskegel)**.** Sei R ein Ring mit Eins, seien $C, D \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $f \in \operatorname{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Geben Sie eine topologische Herleitung für die Konstruktion des Abbildungskegels $\operatorname{Cone}(f) \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.
2. Zeigen Sie: Ist $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_R\mathsf{Ch}$, so ist $\operatorname{Cone}(f)$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ kontraktibel.
3. Zeigen Sie: Ist $\operatorname{Cone}(f)$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ kontraktibel, so ist $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_R\mathsf{Ch}$.
4. Es ist genau dann $H_*(f)\colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Grad}$, wenn $H_*(\operatorname{Cone}(f)) \cong_{{}_R\mathsf{Grad}} 0$ ist.

   Hinweis. Konstruieren Sie eine entsprechende lange exakte Homologiesequenz …

Bitte wenden

Aufgabe 4 (induktive Homotopien und schwach kontraktible Räume)**.** Sei X ein topologischer Raum. Bearbeiten Sie eine der folgenden beiden Aufgaben:

1. Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k \subset \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ eine Teilmenge, für die es eine Familie $(h_\sigma \colon \Delta^k \times [0,1] \longrightarrow X)_{k \in \mathbb{N}, \sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)}$ stetiger Abbildungen mit folgenden Eigenschaften gibt:

   – Für alle $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ ist h_σ eine Homotopie von σ zu einem singulären Simplex in S_k.
   – Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ gilt
   $$h_{\sigma \circ i_{k,j}} = h_\sigma \circ (i_{k,j} \times \mathrm{id}_{[0,1]}).$$
   – Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in S_k$ ist
   $$h_\sigma = \big((x,t) \mapsto \sigma(x)\big).$$

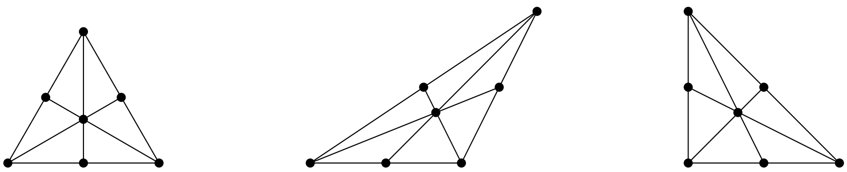
   Sei $C^S(X) \subset C(X)$ der Unterkettenkomplex abelscher Gruppen, der in jedem Grad $k \in \mathbb{N}$ von S_k statt von $\operatorname{map}(\Delta^k, X)$ erzeugt wird.

   Zeigen Sie: Die Inklusion $C^S(X) \hookrightarrow C(X)$ ist eine Kettenhomotopieäquivalenz und induziert somit einen Isomorphismus $H_*\big(C^S(X)\big) \longrightarrow H_*(X)$.

2. Folgern Sie: Ist X schwach kontraktibel, so induziert die konstante Abbildung $X \longrightarrow \bullet$ einen Isomorphismus $H_*(X) \longrightarrow H_*(\bullet)$.

   Hinweis. Ein topologischer Raum X ist *schwach kontraktibel*, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ sind alle stetigen Abbildungen $(S^k, \{e_1^{k+1}\}) \longrightarrow (X, \{x_0\})$ in Top^2 zur konstanten Abbildung mit Wert x_0 homotop. Verwenden Sie nun Aufgabe 2 von Blatt 0 und den ersten Teil ...

Bonusaufgabe (das Haus vom Nikolaus, baryzentrisch unterteilt)**.** Schreiben Sie ein LaTeX-Makro `\subdiv`, das die baryzentrische Unterteilung von affinen 2-Simplizes (gegeben durch ihre Ecken) zeichnet:



Zeichnen Sie damit insbesondere die baryzentrische Unterteilung des Hauses vom Nikolaus (bestehend aus fünf 2-Simplizes).

Bonusbonusaufgabe (die Residenz vom Nikolaus)**.** Helfen Sie dem Nikolaus beim Ausbau seiner bischöflichen Residenz! Schreiben Sie dazu ein LaTeX-Makro `\nikolausresidenz`, so dass `\nikolausresidenz`$\{n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die n-te baryzentrische Unterteilung des Nikolaushauses (bestehend aus fünf 2-Simplizes) zeichnet.

Abgabe bis zum 13. Dezember 2013, 10:00 Uhr, in den Briefkasten