Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 13. Dezember 2013

Aufgabe 1 (Kurvensätze?!)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so besitzt das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^{n-1})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.
2. Ist $f\colon S^1 \sqcup S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ stetig und injektiv, so besitzt das Komplement $S^1 \times S^1 \setminus f(S^1 \sqcup S^1)$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.

Aufgabe 2 (Zusammenhang)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass U dann bereits wegzusammenhängend ist.
2. Sei X ein topologischer Raum, der nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten dann offene Teilmengen von X sind.

Aufgabe 3 (Gebietsinvarianz)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass dann auch das Bild $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 2 sowie den Jordanschen Kurvensatz: Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ zu S^{n-1} homöomorph, so hat $\mathbb{R}^n \setminus S$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.

Aufgabe 4 (explizite Erzeuger in singulärer Homologie)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die durch

$$1 \otimes \mathrm{id}_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n; R)$$

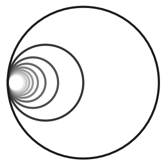
bzw.

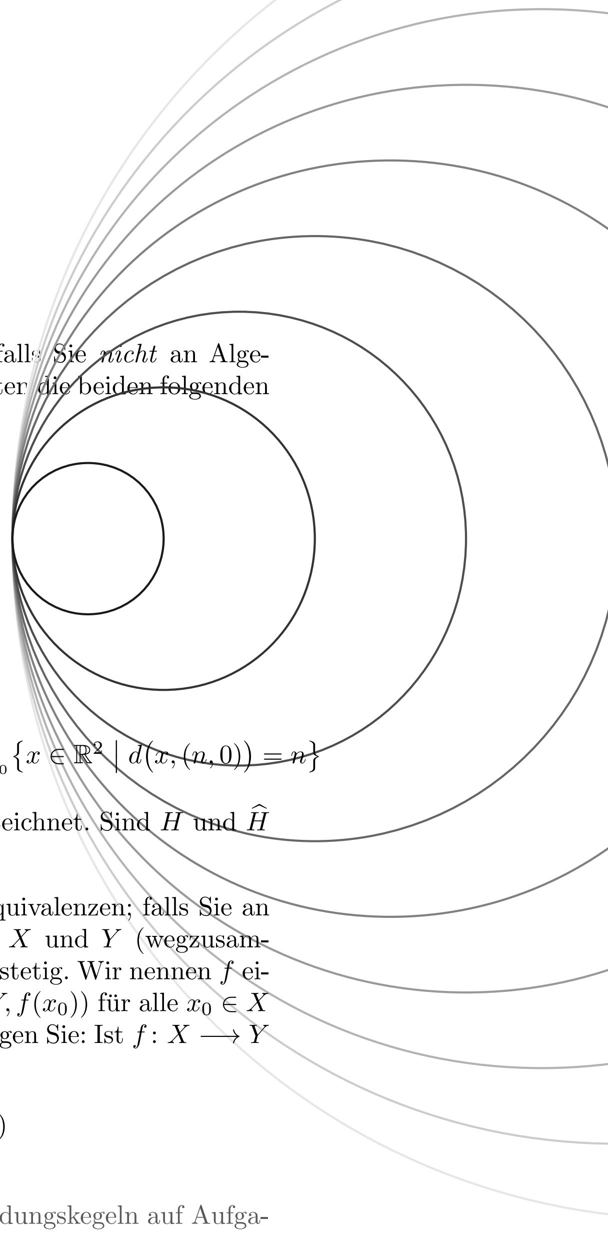
$$1 \otimes \partial_{n+1} \mathrm{id}_{\Delta^{n+1}} \in C_n(\partial \Delta^{n+1}; R)$$

repräsentierten Homologieklassen in $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R)$ bzw. $H_n(\partial\Delta^{n+1}; R)$ diese Homologiemoduln (über R) erzeugen. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
Hinweis. Gehen Sie induktiv vor und verfolgen Sie für diese (relativen) Zykel und geeignete Zerlegungen explizit, was im Einhängungsisomorphismus bzw. in der Mayer-Vietoris-Sequenz passiert.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (hawaiianische und andere Ohrringe; falls Sie *nicht* an Algebraische Topologie I teilgenommen haben)**.** Wir betrachten die beiden folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ (mit der Teilraumtopologie):





$$H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl(x,(1/n,0)\bigr) = 1/n\bigr\} \qquad \widehat{H} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_{>0}} \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl(x,(n,0)\bigr) = n\bigr\}$$

Der Raum H wird auch als *hawaiianischer Ohrring* bezeichnet. Sind H und $\widehat{H}$ homotopieäquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe (singuläre Homologie und schwache Äquivalenzen; falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben)**.** Seien X und Y (wegzusammenhängende) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Wir nennen f eine *schwache Äquivalenz*, falls $\pi_k(f)\colon \pi_k(X,x_0) \longrightarrow \pi_k(Y,f(x_0))$ für alle $x_0 \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$ bijektiv (bzw. ein Isomorphismus) ist. Zeigen Sie: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine schwache Äquivalenz, so ist

$$H_*(f;\mathbb{Z})\colon H_*(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(Y;\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus.

Hinweis. Führen Sie dieses Problem mithilfe von Abbildungskegeln auf Aufgabe 4.2 von Blatt 8 zurück.

Abgabe bis zum 20. Dezember 2013, 10:00 Uhr, in den Briefkasten